

Outils Mathématiques

Caroline Verhoeven

Certificat d'Université en Médecine factuelle



le 23 février 2017

1 Introduction

- Les erreurs aléatoires

2 Inférence statistique

- Introduction
- La distribution d'échantillonnage

3 Tests d'hypothèse

- La p -valeur
- Puissance du test

Les erreurs

Données = erreurs

Les erreurs

Données = erreurs

Nous considérons 3 types d'erreurs :

- les erreurs aléatoires :

- les erreurs systématiques :

- les fraudes

Les erreurs

Données = erreurs

Nous considérons 3 types d'erreurs :

- les erreurs aléatoires :
d'une mesure à l'autre, la valeur réelle peut être surévaluée ou sous-évaluée.
- les erreurs systématiques :
- les fraudes

Les erreurs

Données = erreurs

Nous considérons 3 types d'erreurs :

- les erreurs aléatoires :
d'une mesure à l'autre, la valeur réelle peut être surévaluée ou sous-évaluée.
- les erreurs systématiques :
toujours une surévaluation (ou sous-évaluation) de la valeur réelle.
- les fraudes

Les erreurs

Données = erreurs

Nous considérons 3 types d'erreurs :

- **les erreurs aléatoires** :
d'une mesure à l'autre, la valeur réelle peut être surévaluée ou sous-évaluée.
- les erreurs systématiques :
toujours une surévaluation (ou sous-évaluation) de la valeur réelle.
- les fraudes

Les erreurs de mesure

Les erreurs de mesure : dans toutes les sciences dans laquelle il y a des mesures

Les variabilités biologiques

Les variabilités biologiques : dans les sciences biomédicales

Les variabilités biologiques

Les variabilités biologiques : dans les sciences biomédicales

- Variabilités inter-individuelles
- Variabilités intra-individuelles

Variabilités inter-individuelles

Nous sommes tous uniques

Exemple 1

Les analyses de sang : les normes sont établies de manière à ce que 95% de la population saine se trouve dans la norme.

Variabilités inter-individuelles

Nous sommes tous uniques

Exemple 1

Les analyses de sang : les normes sont établies de manière à ce que 95% de la population saine se trouve dans la norme.

- Par variable testée : une personne saine a une probabilité de 0,95 d'être dans la norme.

Variabilités inter-individuelles

Nous sommes tous uniques

Exemple 1

Les analyses de sang : les normes sont établies de manière à ce que 95% de la population saine se trouve dans la norme.

- Par variable testée : une personne saine a une probabilité de 0,95 d'être dans la norme.
- Supposons 15 variables indépendantes : la probabilité qu'une personne saine soit dans la norme pour les 15 :

$$(0,95)^{15} = 0,463$$

Variabilités inter-individuelles

Nous sommes tous uniques

Exemple 1

Les analyses de sang : les normes sont établies de manière à ce que 95% de la population saine se trouve dans la norme.

- Par variable testée : une personne saine a une probabilité de 0,95 d'être dans la norme.
- Supposons 15 variables indépendantes : la probabilité qu'une personne saine soit dans la norme pour les 15 :

$$(0,95)^{15} = 0,463$$

C'est normal d'être anormal

Variabilités intra-individuelles

Nous changeons avec le temps

Variabilités intra-individuelles

Nous changeons avec le temps

Exemple 2



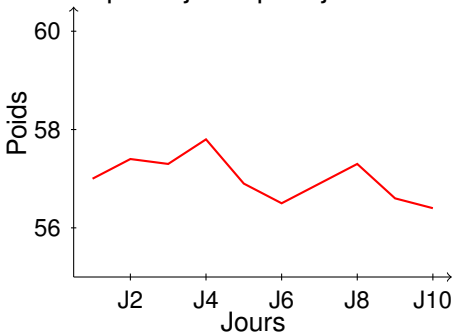
Variabilités intra-individuelles

Nous changeons avec le temps

Exemple 2



Mon poids jour après jour ...

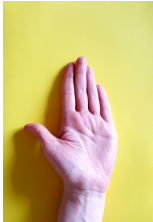


On a besoin de la biostat ...

En sciences biomédicales on cumule les erreurs aléatoires :

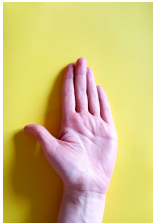
On a besoin de la biostat ...

En sciences biomédicales on cumule les erreurs aléatoires :



On a besoin de la biostat ...

En sciences biomédicales on cumule les erreurs aléatoires :



erreurs de mesures + variabilités biologiques

La biostat aide à gérer les erreurs aléatoires

Ce que je veux faire

Exemple 3

Je veux mesurer le diamètre moyen (μ) de tous les globules rouge d'un patient.

- microcytose : anémies ferriprives et des thalassémies
- macrocytose : carences en folates ou vitamine B12, alcoolisme



Ce que je veux faire

Exemple 3

Je veux mesurer le diamètre moyen (μ) de tous les globules rouge d'un patient.

- microcytose : anémies ferriprives et des thalassémies
- macrocytose : carences en folates ou vitamine B12, alcoolisme



Ce que je veux faire

Exemple 3

Je veux mesurer le diamètre moyen (μ) de tous les globules rouge d'un patient.

- microcytose : anémies ferriprives et des thalassémies
- macrocytose : carences en folates ou vitamine B12, alcoolisme



Problèmes

- Entre ± 4 et 6 millions de globules rouges par mm^3 de sang

Ce que je veux faire

Exemple 3

Je veux mesurer le diamètre moyen (μ) de tous les globules rouge d'un patient.

- microcytose : anémies ferriprives et des thalassémies
- macrocytose : carences en folates ou vitamine B12, alcoolisme



Problèmes

- Entre ± 4 et 6 millions de globules rouges par mm^3 de sang
- Le patient risque de ne pas être d'accord

Ce que je fais

Exemple 3

Je mesure qu'un petit nombre de globules rouges

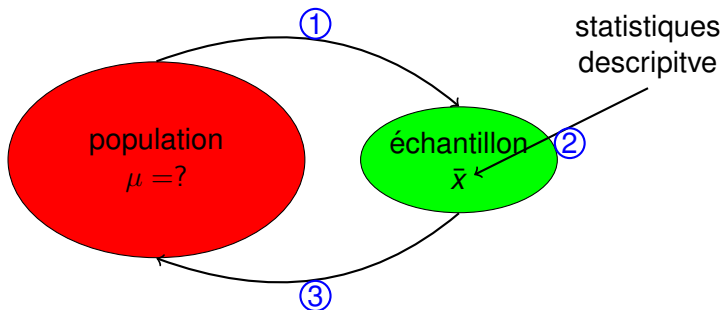
Ce que je fais

Exemple 3

Je mesure qu'un petit nombre de globules rouges

- Je mesure par exemple 20 globules rouges
- Je calcule le diamètre moyen (\bar{x}) de ces 20 globules
- J'essaie de conclure si le diamètre moyen est normal

Inférence statistique



- μ : moyenne pour la population
- \bar{x} : moyenne pour l'échantillon

Pas simple l'inférence

Exemple 3

- J'obtiens le diamètre moyen de 20 globules rouges

Pas simple l'inférence

Exemple 3

- J'obtiens le diamètre moyen de 20 globules rouges
- Je prend un autre échantillon se 20 globules rouges du même patient

Pas simple l'inférence

Exemple 3

- J'obtiens le diamètre moyen de 20 globules rouges
- Je prend un autre échantillon se 20 globules rouges du même patient
⇒ j'obtiens une autre valeur pour la moyenne

Pas simple l'inférence

Exemple 3

- J'obtiens le diamètre moyen de 20 globules rouges
- Je prend un autre échantillon se 20 globules rouges du même patient
⇒ j'obtiens une autre valeur pour la moyenne
- moyennes de 10 échantillons de 20 sujets d'une même population :

\bar{X}_1	\bar{X}_2	\bar{X}_3	\bar{X}_4	\bar{X}_5	\bar{X}_6	\bar{X}_7	\bar{X}_8	\bar{X}_9	\bar{X}_{10}
7,29	7,31	7,15	6,79	6,96	7,12	7,10	7,27	7,37	7,18

Pas simple l'inférence

Exemple 3

- J'obtiens le diamètre moyen de 20 globules rouges
- Je prend un autre échantillon se 20 globules rouges du même patient
⇒ j'obtiens une autre valeur pour la moyenne
- moyennes de 10 échantillons de 20 sujets d'une même population :

\bar{X}_1	\bar{X}_2	\bar{X}_3	\bar{X}_4	\bar{X}_5	\bar{X}_6	\bar{X}_7	\bar{X}_8	\bar{X}_9	\bar{X}_{10}
7,29	7,31	7,15	6,79	6,96	7,12	7,10	7,27	7,37	7,18

Conclusion :

La variabilité des individus fait varier les moyennes des échantillons

La distribution d'échantillonnage

- Calculer la moyenne de tous les échantillons possibles de N sujets venant de la même population (en théorie)

La distribution d'échantillonnage

- Calculer la moyenne de tous les échantillons possibles de N sujets venant de la même population (en théorie)
- Faire un histogramme

La distribution d'échantillonnage

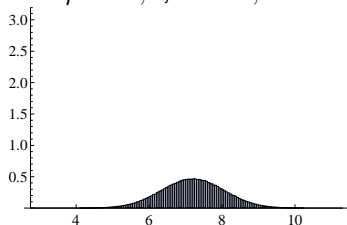
- Calculer la moyenne de tous les échantillons possibles de N sujets venant de la même population (en théorie)
- Faire un histogramme
- **Distribution d'échantillonnage**

Théorème centrale limite I

Distribution des valeurs individuelles gaussienne

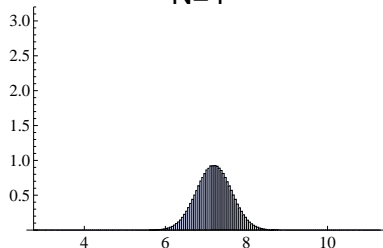
Distribution des individus (X)

$$\mu = 7,2, \sigma = 0,86$$



Distribution d'échantillonnage (\bar{X})

$$N=4$$

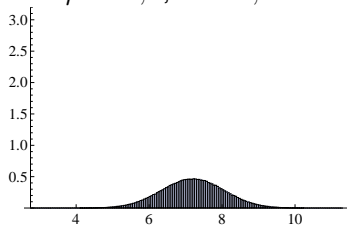


Théorème centrale limite I

Distribution des valeurs individuelles gaussienne

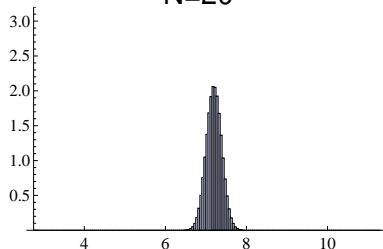
Distribution des individus (X)

$$\mu = 7,2, \sigma = 0,86$$



Distribution d'échantillonnage (\bar{X})

$$N=20$$

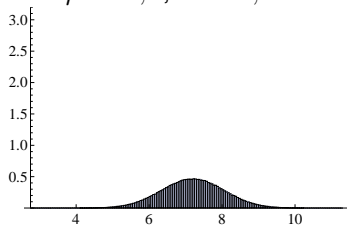


Théorème centrale limite I

Distribution des valeurs individuelles gaussienne

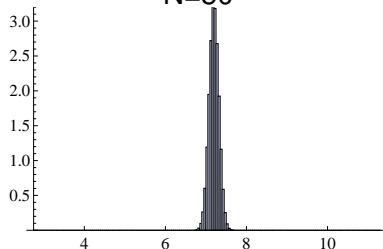
Distribution des individus (X)

$$\mu = 7,2, \sigma = 0,86$$



Distribution d'échantillonnage (\bar{X})

$N=50$

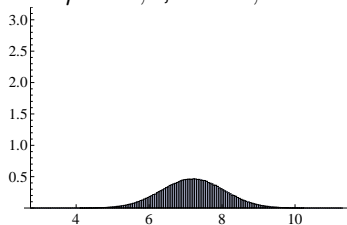


Théorème centrale limite I

Distribution des valeurs individuelles gaussienne

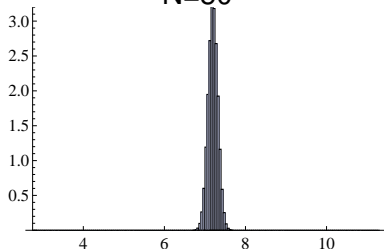
Distribution des individus (X)

$$\mu = 7,2, \sigma = 0,86$$



Distribution d'échantillonnage (\bar{X})

$N=50$



Conclusions :

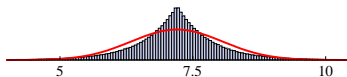
- $\mu_{\bar{X}} = \mu$
- $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ erreur standard de la moyenne (ESM)

Théorème centrale limite II

Distribution des valeurs individuelles **non** gaussienne

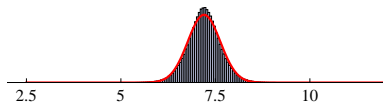
Distribution des individus (X)

$$\mu = 7,2, \sigma = 0,86$$



Distribution d'échantillonnage (\bar{X})

$$N=4$$

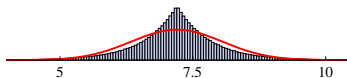


Théorème centrale limite II

Distribution des valeurs individuelles **non** gaussienne

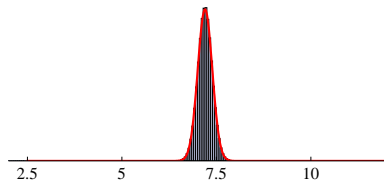
Distribution des individus (X)

$$\mu = 7,2, \sigma = 0,86$$



Distribution d'échantillonnage (\bar{X})

$$N=20$$

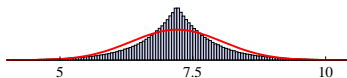


Théorème centrale limite II

Distribution des valeurs individuelles **non** gaussienne

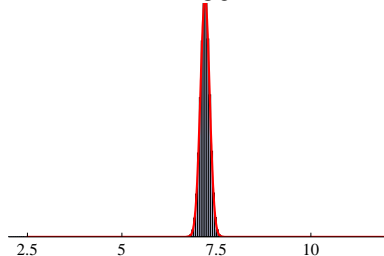
Distribution des individus (X)

$$\mu = 7,2, \sigma = 0,86$$



Distribution d'échantillonnage (\bar{X})

$$N=50$$

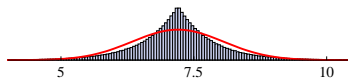


Théorème centrale limite II

Distribution des valeurs individuelles **non** gaussienne

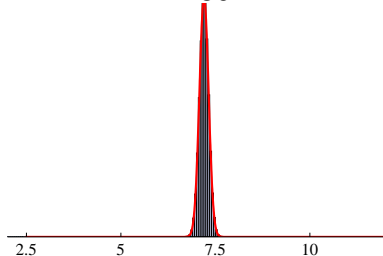
Distribution des individus (X)

$$\mu = 7,2, \sigma = 0,86$$



Distribution d'échantillonnage (\bar{X})

$N=50$



Conclusions :

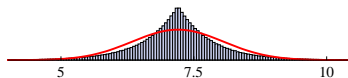
- N grand \Rightarrow Distribution d'échantillonnage va vers une gaussienne

Théorème centrale limite II

Distribution des valeurs individuelles **non** gaussienne

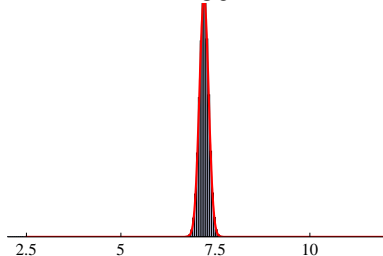
Distribution des individus (X)

$$\mu = 7,2, \sigma = 0,86$$



Distribution d'échantillonnage (\bar{X})

$$N=50$$



Conclusions :

- N grand \Rightarrow Distribution d'échantillonnage va vers une gaussienne
- $\mu_{\bar{X}} = \mu$
- $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ erreur standard de la moyenne (ESM)

Exemple

Exemple 4

QI moyen de la population : $\mu_0 = 100$,
écart-type pour la population : $\sigma_0 = 15$.

Un savant fou développe un médicament pouvant augmenter le QI. 30 personnes prennent ce médicament, ensuite on teste leur QI.

QI moyen de ces 30 personnes : $\bar{x} = 140$.

Ce médicament augmente-t-il en moyenne le QI ?

Test d'hypothèse : principe

Principe : Confronter deux hypothèse contradictoire

Exemple 4

Test d'hypothèse : principe

Principe : Confronter deux hypothèse contradictoire

Exemple 4

- Formulation de l'hypothèse nulle et alternative :

Test d'hypothèse : principe

Principe : Confronter deux hypothèse contradictoire

Exemple 4

- Formulation de l'hypothèse nulle et alternative :
 - $H_0 : \mu = 100$
 - $H_a : \mu > 100$

Test d'hypothèse : principe

Principe : Confronter deux hypothèse contradictoire

Exemple 4

- Formulation de l'hypothèse nulle et alternative :
 - $H_0 : \mu = 100$
 - $H_a : \mu > 100$
- Les données donnent $\bar{x} > \mu_0$
- A la fin, on décide de rejeter l'hypothèse nulle ou non

Test d'hypothèse : principe

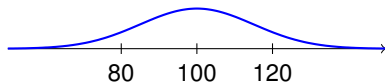
Principe : Confronter deux hypothèse contradictoire

Exemple 4

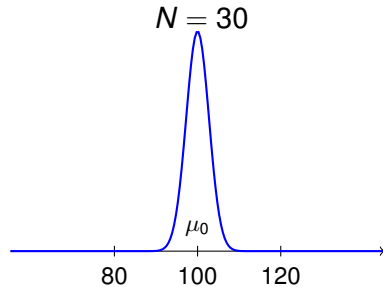
- Formulation de l'hypothèse nulle et alternative :
 - $H_0 : \mu = 100$
 - $H_a : \mu > 100$
- Les données donnent $\bar{x} > \mu_0$
- A la fin, on décide de rejeter l'hypothèse nulle ou non
- **Quand doit-on rejeter H_0 ou non ?**

Exemple

Distribution des individus si H_0 vraie

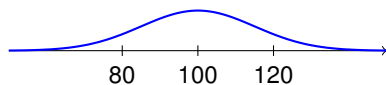


Distribution d'échantillonnage si H_0

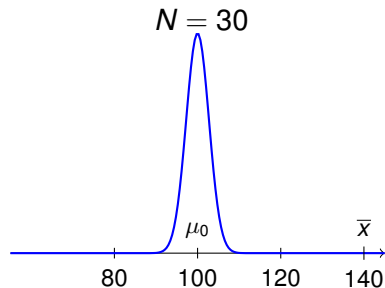


Exemple

Distribution des individus si H_0 vraie

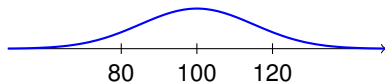


Distribution d'échantillonnage si H_0

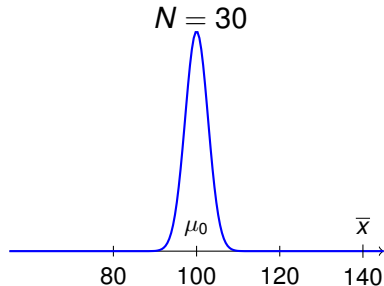


Exemple

Distribution des individus si H_0 vraie



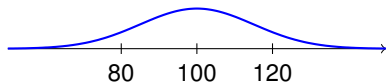
Distribution d'échantillonnage si H_0



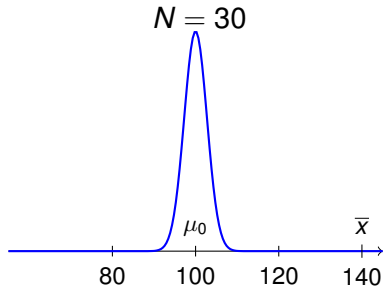
- p -valeur : probabilité qu'on obtienne un échantillon de moyenne ≥ 140 (ici $p = 0,00003$)

Exemple

Distribution des individus si H_0 vraie



Distribution d'échantillonnage si H_0

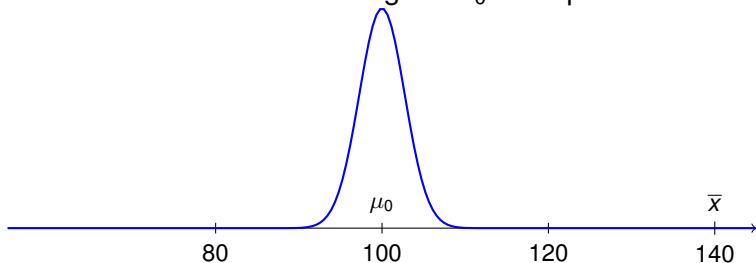


- p -valeur : probabilité qu'on obtienne un échantillon de moyenne ≥ 140 (ici $p = 0,00003$)
- On rejette H_0 si p est suffisamment petit

Le risque de 1ère espèce

Que veut dire “ p suffisamment petit” ?

Distribution d'échantillonnage si H_0 vraie pour $N = 30$

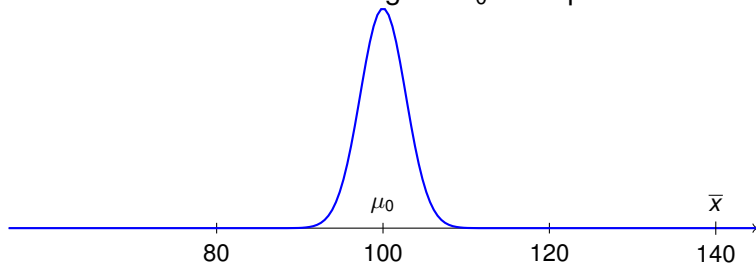


Le risque de 1ère espèce

Que veut dire “ p suffisamment petit” ?

- Cela dépend du risque qu'on accepte de prendre

Distribution d'échantillonnage si H_0 vraie pour $N = 30$

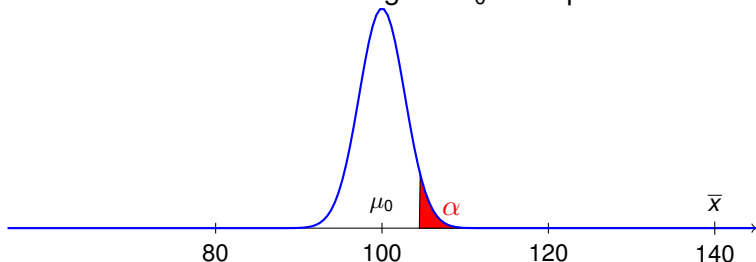


Le risque de 1ère espèce

Que veut dire “ p suffisamment petit” ?

- Cela dépend du risque qu'on accepte de prendre
- On détermine ce risque α avant de commencer le test
- α est le risque de 1ère espèce

Distribution d'échantillonnage si H_0 vraie pour $N = 30$



Choix standard pour α

- On choisit souvent $\alpha = 0,05$

Choix standard pour α

- On choisit souvent $\alpha = 0,05$
- Si $p < 0,05$: le résultat est significatif
- Si $p < 0,01$: le résultat est hautement significatif
- Si $p < 0,001$: le résultat est très hautement significatif

Statistique vs clinique

Notre savant fou conclue que son traitement augmente le QI. Est-ce une augmentation suffisante ?

Statistiquement significatif \neq cliniquement significatif

La différence réelle peut être petite, même si p est très petit !

Erreurs possible

	Réalité	
	H_0 vraie	H_0 fausse
NRH_0	😊	Erreur de 2ème espèce 😞
RH_0	Erreur de 1ère espèce 😞	😊

Erreur de 2ème espèce

- Erreur de 2ème espèce : Ne pas rejeter H_0 alors H_0 fausse

Erreur de 2ème espèce

- Erreur de 2ème espèce : Ne pas rejeter H_0 alors H_0 fausse
- β : risque de faire une erreur de 2ème espèce.
- $1 - \beta$: puissance du test.

Erreur de 2ème espèce

- Erreur de 2ème espèce : Ne pas rejeter H_0 alors H_0 fausse
- β : risque de faire une erreur de 2ème espèce.
- $1 - \beta$: puissance du test.
- On ne sait calculer β que si on connaît la taille de l'effet.